UNIVERSIDADE da MADEIRA

Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia

PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR PARA MAIORES DE 23 ANOS - 2017

Matemática - 14/06/2017

Atenção: ***Justifique*** *os raciocínios utilizados na resolução das questões.*
Não é permitido *o uso de* **calculadora** *nem de* ***telemóvel****.*
A prova tem a duração de ***120 minutos****.*

Questão	1	2	3.(a)	3.(b)	3.(c)	3.(d)	4.(a)	4.(b)	5.(a)	5.(b)	6
Cotação	2.0	1.5	1.5	2.5	2.5	1.5	1.5	1.5	2.0	1.0	2.5

1. Resolva, em $\mathbb{R}$, a seguinte inequação $|x^2 - 2x| \geq 1$.

2. Determine $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3^x}{3^{x-1} + 2^x}$.

3. Considere a função definida para $x \in \mathbb{R}$ por $f(x) = e^{-x^2}$.

   (a) Calcule as assíntotas do gráfico de f, caso existam.

   (b) Estude os intervalos de monotonia e a existência de extremos de f.

   (c) Estude o sentido da concavidade do gráfico da função f e determine, caso existam, os seus pontos de inflexão.

   (d) Esboce o gráfico e identifique o contradomínio da função f.

4. Considere a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cujo termo geral é definido por

$$u_n = \frac{\cos(n\pi)}{n}.$$

   (a) Mostre que a sucessão é limitada, mas não é monótona.

   (b) Calcule, se existir, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5. Sejam $z = 2 - 3i$ e $w = (x-2) + (y+1)i$. Calcule os valores reais de x e y de modo que:

   (a) $z + w$ seja real e zw seja um imaginário puro.

   (b) z e w sejam números complexos conjugados.

6. Represente no plano complexo o conjunto definido por

$$|z| \leq 3 \ \wedge \ \left|z - \frac{1}{2} - 2i\right| \geq \frac{1}{2} \ \wedge \ \frac{\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \frac{11\pi}{6}.$$

Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia

PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR PARA MAIORES DE 23 ANOS - 2017

Matemática - 14/06/2017

Uma Resolução Possível

Atenção: ***Justifique*** *os raciocínios utilizados na resolução das questões.*
Não é permitido *o uso de* ***calculadora*** *nem de* ***telemóvel****.*
A prova tem a duração de ***120 minutos****.*

Questão	1	2	3.(a)	3.(b)	3.(c)	3.(d)	4.(a)	4.(b)	5.(a)	5.(b)	6
Cotação	2.0	1.5	1.5	2.5	2.5	1.5	1.5	1.5	2.0	1.0	2.5

1. Resolva, em $\mathbb{R}$, a seguinte inequação $|x^2 - 2x| \geq 1$.
Temos

$$\begin{aligned} \left|x^2 - 2x\right| \geq 1 &\Leftrightarrow x^2 - 2x \geq 1 \vee x^2 - 2x \leq -1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \geq 0 \vee x^2 - 2x + 1 \leq 0. \end{aligned}$$

Usando a fórmula resolvente para obter os zeros das funções quadráticas obtemos

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 1 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{4+4}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 1 \pm \frac{\sqrt{2 \times 2^2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

e

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Temos assim que

$$x^2 - 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, 1 - \sqrt{2}\right] \cup \left[1 + \sqrt{2}, +\infty\right[$$

e que

$$x^2 - 2x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \{1\}.$$

Concluímos assim que

$$\left|x^2 - 2x\right| \geq 1 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, 1 - \sqrt{2}\right] \cup \{1\} \cup \left[1 + \sqrt{2}, +\infty\right[.$$

2. Determine $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3^x}{3^{x-1}+2^x}$.
   Temos
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x}{3^{x-1}+2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3^{x-1}}{3^{x-1}} \frac{3}{1+\frac{2^x}{3^{x-1}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{1+3\left(\frac{2}{3}\right)^x} = 3.$$

3. Considere a função definida para $x \in \mathbb{R}$ por $f(x) = e^{-x^2}$.

   (a) Calcule as assíntotas do gráfico de f, caso existam.
   O gráfico da função f não tem assíntotas verticais já que f resulta da composição de duas funções contínuas e tem por domínio o conjunto dos números reais. Relativamente às assíntotas horizontais, verificamos que a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal (à esquerda e à direita) já que
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$
   (não existem, consequentemente, assíntotas oblíquas).

   (b) Estude os intervalos de monotonia e a existência de extremos de f.
   A derivada da função f é dada, para x real, por
$$f'(x) = \left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2}\left(-x^2\right)' = e^{-x^2}(-2x) = -2xe^{-x^2}.$$
   A função f é crescente quando $x < 0$ já que
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2xe^{-x^2} > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0,$$
   e é decrescente quando $x > 0$ já que
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -2xe^{-x^2} < 0 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0.$$
   A derivada da função f anula-se apenas no ponto $x = 0$ pois
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$
   Apresentando os resultados anteriores num quadro de estudo do sinal de f', considerando que $f(0) = e^{-0} = 1$, obtemos:

		0	
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	1	$\searrow$

   Conclusão: f é crescente no intervalo $]-\infty, 0[$, é decrescente no intervalo $]0, +\infty[$ e tem um único extremo, um máximo absoluto, em $x = 0$, que vale 1.

(c) Estude o sentido da concavidade do gráfico da função f e determine, caso existam, os seus pontos de inflexão.

A concavidade do gráfico da função f depende do sinal da segunda derivada da função f. Ora,

$$\begin{aligned} f''(x) &= [f'(x)]' = \left(-2xe^{-x^2}\right)' = -2\left(xe^{-x^2}\right)' \\ &= -2\left[e^{-x^2} + x\left(-2xe^{-x^2}\right)\right] = -2\left(e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}\right) \\ &= -2e^{-x^2}\left(1-2x^2\right). \end{aligned}$$

Como $2e^{-x^2} > 0$, o sinal de $f''(x)$ depende apenas do sinal de $2x^2-1$. Temos

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2-1=0 \Leftrightarrow 2x^2=1 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2x^2-1>0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$$

e

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 2x^2-1<0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[.$$

Apresentando os resultados anteriores num quadro de estudo do sinal de f'', considerando que $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}}$, obtemos:

		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\frown$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\smile$

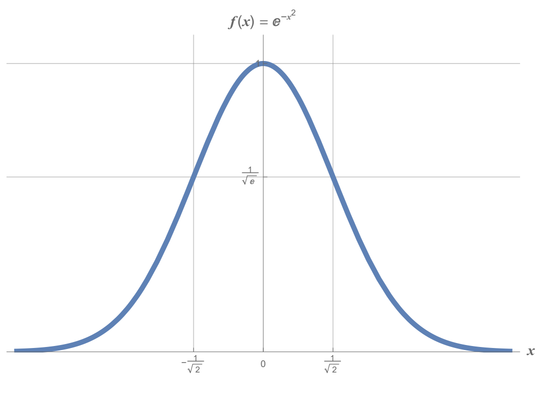
Concluímos assim que no intervalo $\left]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$, o gráfico da função f tem concavidade voltada para baixo, na reunião de intervalos

$$\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[,$$

o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima e que o gráfico de f tem dois pontos de inflexão: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$

(d) Esboce o gráfico e identifique o contradomínio da função f.

Considerando as alíneas anteriores:



O contradomínio de f, que é o conjunto dos pontos y tais que $y = f(x)$, para algum x pertencente ao domínio de f, é o intervalo $]0, 1]$.

4. Considere a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cujo termo geral é definido por

$$u_n = \frac{\cos(n\pi)}{n}.$$

(a) Mostre que a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, mas não é monótona.
Como, para qualquer número natural n,

$$u_n = \frac{\cos(n\pi)}{n} = \frac{(-1)^n}{n}$$

e

$$|u_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq 1,$$

resulta que a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, pertencendo todos os seus elementos ao intervalo $[-1, 1]$.
A sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é monótona pois os seus valores alternam entre valores positivos e valores negativos (para n par, $u_n = \frac{1}{n} > 0$, e para n ímpar, $u_n = -\frac{1}{n} < 0$).

(b) Calcule, se existir, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
Como o termo geral da sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ resulta do produto de um infinitésimo, $\frac{1}{n}$, por uma sucessão limitada, $\cos(n\pi)$, podemos concluir que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

5. Sejam $z = 2 - 3i$ e $w = (x-2) + (y+1)i$. Calcule os valores reais de x e y de modo que:

(a) $z + w$ seja real e zw seja um imaginário puro.
Comecemos por determinar $z + w$:

$$\begin{aligned} z + w &= 2 - 3i + (x-2) + (y+1)i \\ &= x + (y-2)i. \end{aligned}$$

O número $z+w$ é real se a sua parte imaginária for nula, *i.e.*, se $y - 2 = 0$, *i.e.*, se $y = 2$.
Quando $y = 2$ temos $w = (x-2) + 3i$ e

$$\begin{aligned} zw &= (2-3i)\left[(x-2) + 3i\right] \\ &= (2-3i)(x-2) + (2-3i)\,3i \\ &= 2(x-2) - 3(x-2)\,i + 6i + 9 \\ &= \left[2(x-2) + 9\right] + \left[-3(x-2) + 6\right] i \\ &= (2x+5) + (12-3x)\,i. \end{aligned}$$

O número complexo zw é um imaginário puro se a sua parte real for nula, *i.e.*, se

$$2x+5=0 \Leftrightarrow 2x=-5 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}.$$

A solução é $(x,y)=\left(-\frac{5}{2},2\right)$.

(b) z e w sejam números complexos conjugados.
Para que z e w sejam números complexos conjugados temos de ter

$$z=\overline{w} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=x-2 \\ -3=-(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}.$$

i.e., $(x,y)=(4,2)$.

6. Representе no plano complexo o conjunto definido por

$$|z|\leq 3 \ \wedge \ \left|z-\frac{1}{2}-2i\right|\geq\frac{1}{2} \ \wedge \ \frac{\pi}{6}\leq\arg(z)\leq\frac{11\pi}{6}.$$

Consideremos $z=x+yi$, onde x e y são número reais. Temos

$$|z|\leq 3 \ \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}\leq 3 \ \Leftrightarrow (x-0)^2+(y-0)^2\leq 3^2\ ,$$

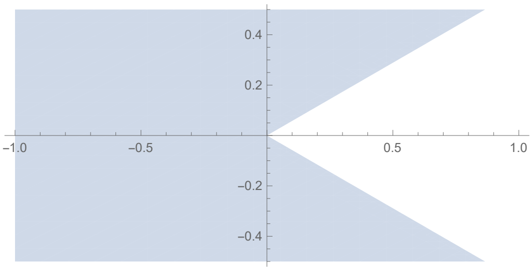
i.e., a região definida por $|z|\leq 3$ é o círculo de centro $(0,0)$ e raio 3.
Relativamente à região definida por $\left|z-\frac{1}{2}-2i\right|\geq\frac{1}{2}$ temos

$$\begin{aligned}\left|z-\frac{1}{2}-2i\right| &\geq \frac{1}{2}\Leftrightarrow\left|x+yi-\frac{1}{2}-2i\right|\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)+(y-2)\,i\right|\geq\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2}\geq\frac{1}{2},\end{aligned}$$

condição que define a região complementar ao círculo aberto de centro $\left(\frac{1}{2},2\right)$ e raio $\frac{1}{2}$. Finalmente, a condição

$$\frac{\pi}{6}\leq\arg(z)\leq\frac{11\pi}{6}$$

é satisfeita por todos os números complexos z com imagem geométrica P, tais que a medida, em radianos, da amplitude do ângulo em que o lado origem é o semieixo real positivo e o lado extremidade é a semirreta $\dot{O}P$ é um elemento do intervalo $\left[\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right]$. Graficamente:



Fazendo a interseção das três regiões obtemos a região a sombreado na figura seguinte: